Probit

(rascunho de notas de aula)

(Train, 2009: cap. 5)

Victor Gomes

Universidade de Brasilia

Probabilidades

No modelo probit se assume distribuição normal para todos os componentes não-observados da utilidade. Novamente a utilidade é escrita entre a parte observada e a não-observada:

$$U_{nj} = V_{nj} + \varepsilon_{nj} \forall j. \tag{1}$$

Considere o vetor ε_n' composto por cada ε_{nj}. Assum que ε_n' possui distribuição normal com vetor de média zero e matriz de covariância Ω. A densidade de ε_n' é

$$\phi(\varepsilon_n') = \frac{1}{(2\pi)^{J/2}|\Omega|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon_n' \Omega^{-1} \varepsilon_n} \tag{2}$$

A covariância Ω pode depender das variáveis de escolha individual, tal que Ω_n é mais apropriado (n omitido por simplicidade).

A probabilidade de escolha é

$$
\begin{aligned}
P_{ni} &= \text{Prob}(V_{ni} + \varepsilon_{ni} > V_{nj} + \varepsilon_{nj}, \ \forall j \neq i) && (3) \\
&= \int I(V_{ni} + \varepsilon_{ni} > V_{nj} + \varepsilon_{nj}, \ \forall j \neq i)\phi(\varepsilon_n)d\varepsilon_n && (4)
\end{aligned}
$$

Como antes I é variável indicadora. Esta integral não tem forma-fechada, então deve ser solucionada numericamente por simulação.

Expressando de forma mais simples: faça $B_{ni} = \{\varepsilon_n \text{ s.a. } V_{ni} + \varepsilon_{ni} > V_{nj} + \varepsilon_{nj}, \ \forall j \neq i\}$. Então

$$
P_{ni} = \int_{\varepsilon_n \in B_{ni}} \phi(\varepsilon_n)d\varepsilon_n \tag{5}
$$

que é a integral sobre alguns valores de ε_n e não todos os valores possíveis.

As expressões (3) e (5) são integrais de dimensão J sobre J erros ε_{nj}, $j = 1, ..., J$.

Diferença de utilidade

Como no logit o modelo é aplicado em diferença a uma alternativa i. Defina $\tilde{U}_{nji} \equiv U_{nj} - U_{ni}$, $\tilde{V}_{nji} \equiv V_{nj} - V_{ni}$ e $\tilde{\varepsilon}_{nji} \equiv \varepsilon_{nj} - \varepsilon_{ni}$. Então

$$P_{ni} = \text{Prob}(\tilde{U}_{nji} < 0 \forall j \neq i)$$

Defina o vetor $\tilde{\varepsilon}_{ni}$ de dimensão $(J-1)$ sobre todas as alternativas *exceto* i. Uma vez que a diferença de duas normais é uma normal, a densidade da diferença de erros é

$$\phi(\tilde{\varepsilon}'_{ni}) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2(J-1)}|\tilde{\Omega}_i|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}'_{ni}\tilde{\Omega}_i^{-1}\tilde{\varepsilon}_{ni}} \quad (6)$$

aqui $\tilde{\Omega}_i$ é a covariância de $\tilde{\varepsilon}_{ni}$, derivado de Ω. Então a probabilidade de escolha é

$$P_{ni} = \int I(\tilde{V}_{nji} + \tilde{\varepsilon}_{nji} < 0,\ \forall j \neq i)\phi(\tilde{\varepsilon}_{ni})d\tilde{\varepsilon}_{ni} \tag{7}$$

e a forma compacta é

$$P_{ni} = \int_{\tilde{\varepsilon}_{ni} \in \tilde{B}_{ni}} \phi(\tilde{\varepsilon}_{ni})d\tilde{\varepsilon}_{ni} \tag{8}$$

tal que $\tilde{B}_{ni} = \{\tilde{\varepsilon}_{ni}$ s.a. $\tilde{V}_{nji} + \tilde{\varepsilon}_{nji} < 0,\ \forall j \neq i\}$, que é uma integral dimensional $(J-1)$ sobre a diferença em $\tilde{B}_{ni}$.

Coeficientes aleatórios

Assuma que a utilidade seja da forma:

$$U_{nj} = \beta_n' x_{nj} + \varepsilon_{nj}$$

β_n é coeficiente dos indivíduos que representa a preferência. Suponha que ele é normalmente distribuido na população, com média b e convariância W:

$$\beta_n \sim N(b, W)$$

o objetivo aqui é estimar b e W.

A utilidade pode ser escrita como média e desvio da média:

$$U_{nj} = b_n' x_{nj} + \tilde{\beta}_n' x_{nj} + \varepsilon_{nj} \tag{9}$$

aqui

$$\tilde{\beta}_n = \beta_n - b$$

Os últimos termos de (9) são aleatórios, então

$$U_{nj} = b_n' x_{nj} + \eta_{nj} \tag{10}$$

$$\eta_{nj} \equiv \tilde{\beta}_n' x_{nj} + \varepsilon_{nj}$$

Seguindo modelo de 2 alternativas: η_{nj} possui média zero

$$\mathsf{E}[\tilde{\beta}_n' x_{nj} + \varepsilon_{nj}] = 0$$

e

$$\mathsf{Var}[\tilde{\beta}_n' x_{nj} + \varepsilon_{nj}] = x_{nj}^2 \sigma_\beta + \sigma_\varepsilon.$$

Em um modelo de duas alternativas a covariância é

$$\mathsf{Cov}(\eta_{n1}, \eta_{n2}) = \mathsf{E}[(\tilde{\beta}_n' x_{n1} + \varepsilon_{n1})(\tilde{\beta}_n' x_{n2} + \varepsilon_{n2})] \quad (11)$$

$$= x_{n1} x_{n2} \sigma_\beta$$

Então a matriz de covariância será:

$$\Omega = \sigma_\beta \begin{pmatrix} x_{n1}^2 & x_{n1}x_{n2} \\ x_{n1}x_{n2} & x_{n2}^2 \end{pmatrix} + \sigma_\varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Usualmente se normaliza $\sigma_\varepsilon = 1$.