Mixed Logit e C-Logit (Modelo Dinâmico)

(rascunho de notas de aula)

(Train, 2009: cap. 6 e 7)

Victor Gomes

Universidade de Brasilia

06/04/2019

Probabilidades

Mixed logit pode assumir diversas formulações e cada derivação permite interpretações particulares. O modelo mixed logit é definido a partir da forma funcional das suas probabilidades de escolha. Qualquer especificação comportamental que derive estas probabilidades particulares pode ser chamado de modelo mixed logit.

Probabilidades mixed logit são integrais das probabilidades padrão do logit sobre uma densidade de parâmetros. I.e., um modelo mixed logit é qualquer modelo cuja probabilidades de escolha podem ser expressas como

$$P_{ni} = \int L_{ni}(\beta) f(\beta) d\beta \tag{1}$$

tal que $L_{ni}(\beta)$ é a probabilidade logit solucionada nos parâmetros β:

$$L_{ni}(\beta) = \frac{e^{V_{ni}(\beta)}}{\sum_{j=1}^{J} e^{V_{nj}(\beta)}}, \tag{2}$$

e $f(\beta)$ é uma função densidade. $V_{ni}(\beta)$ é a parte observada da utilidade que depende dos parâmetros β. Se a utilidade é linear em β, então $V_{ni}(\beta) = \beta' x_{ni}$. Nesse caso, a probabilidade mixed logit assume a forma usual:

$$P_{ni} = \int \left[\frac{e^{\beta' x_{ni}}}{\sum_{j=1}^{J} e^{\beta' x_{nj}}} \right] f(\beta) d\beta \tag{3}$$

Esta probabilidade é uma média ponderada da fórmula logit solucionada em valores diferentes de β, com os pesos (ponderadores) dados pela densidade $f(\beta)$.

Na literatura de estatística a média ponderada de várias funções é denominada de distribuição de misturas. Mixed logit é uma mistura da função logit solucionada para β diferentes com $f(\beta)$ como a distribuição de misturas.*

A distribuição $f(\beta)$ pode ser discreta, com β assumindo um conjunto finito de valores distintos. Suponha que β assume M valores possíveis $b_1, ..., b_M$, com probabilidade s_m fazendo $\beta = b_m$. Neste caso a probabilidade de escolha é:

$$P_{ni} = \sum_{m=1}^{M} s_m \left[\frac{e^{\beta'_m x_{ni}}}{\sum_{j=1}^{J} e^{\beta'_m x_{nj}}} \right] \tag{4}$$

*O logit padrão é um caso especial tal que a distribuição de misturas $f(\beta)$ é degenerada nos parâmetros fixados: $f(\beta) = 1$ para $\beta = b$ e 0 para $\beta \neq b$.

Esta especificação é útil se existem M segmentos na população com sua própria escolha ou preferências. A participação da população em cada segmento é s_m, que por sua vez pode ser estimado com o modelo em que se estima b_m.

Na maioria das aplicações de mixed logit, $f(\beta)$ é uma função contínua. Exemplo: a densidade de β pode ser especificada como normal com média b e covariância W. Neste caso a probabilidade de escolha é

$$P_{ni} = \int \left[\frac{e^{\beta' x_{ni}}}{\sum_{j=1}^{J} e^{\beta' x_{nj}}} \right] \phi(\beta \mid b, W) d\beta \tag{5}$$

tal que $\phi(\cdot)$ é uma densidade normal. Neste caso o econometrista estima b e W. A função lognormal, uniforme, gamma ou qualquer outra pode ser aplicada.

Notação. A forma apropriada de representar os parâmetros da densidade de β é $f(\beta \mid \theta)$, tal que θ representam os parâmetros da densidade. As probabilidade mixed logit então é função de θ:

$$P_{ni} = \int L_{ni}(\beta) f(\beta \mid \theta) d\beta \tag{6}$$

Neste caso os β's são similares aos ε_{nj}'s.

Coeficientes aleatórios

A derivação do modelo mixed logit mais 'direta' é a de *coeficientes aleatórios*. O indivíduo pode escolher entre J alternativas. A utilidade da alternativa j é

$$U_{nj} = \beta_n' x_{nj} + \varepsilon_{nj} \tag{7}$$

tal que x_{nj} são as variáveis observadas, β_n o vetor de coeficientes para o tipo de indivíduo n. ε_{nj} é valor extremo iid.

Os coeficientes variam na população com densidade $f(\beta)$. A densidade é uma função de parâmetros θ que representa, por exemplo, a média e a covariância dos β na população.

O indivíduo escolhe a alternativa i se e somente se $U_{ni} > U_{nj}$ $\forall j \neq i$. O pesquisador observa x_{nj} mas não β_n ou ε_{nj}. Como o econometrista não conhece β_n, a probabilidade de escolha é a integral de $L_{ni}(\beta_n)$ sobre todos os possíveis valores de β_n:

$$P_{ni} = \int \left[\frac{e^{\beta' x_{ni}}}{\sum_{j=1}^{J} e^{\beta' x_{nj}}} \right] f(\beta \mid \theta) d\beta \tag{8}$$

Em muitas aplicações $f(\beta)$ é normal ou lognormal. No caso da normal:

$$\beta \sim N(b, W)$$

Componentes do erro. O mixed logit pode ser usado com ou sem a interpretação do modelo de coeficientes aleatórios. O ponto importante é a decomposição do termo de erro em dois fatores. Aqui um modelo denominado de componente de erro.

$$U_{nj} = \alpha' x_{nj} + \mu_n' z_{nj} + \varepsilon_{nj} \tag{9}$$

tal que x_{nj} e z_{nj} são vetores de variáveis observáveis relacionados com a alternativa j. α é o vetor dos coeficientes fixos enquanto μ o vetor dos termos aleatórios (com média zero) e ε_{nj} é valor extremo iid. Uma das diferenças deste modelo para coeficientes aleatórios é que neste último $z_{nj} = x_{nj}$. Então a utilidade em CA é:*

$$U_{nj} = \alpha' x_{nj} + \mu_n' x_{nj} + \varepsilon_{nj}$$

Os termos em z_{nj} são componentes do erro que conjuntamente com ε_{nj} definem a parte estocástica da utilidade: $\eta_{nj} \equiv \mu_n' z_{nj} + \varepsilon_{nj}$. Com este novo componente a utilidade é correlacionada

*Embora estes modelos sejam formalmente equivalentes, a forma que se desenvolve a aplicação produz resultados que são bem distintos. Ver a discussão em Train, p. 140.

entre as alternativas:

$$\mathsf{Cov}(\eta_{ni}, \eta_{nj}) = \mathsf{E}[(\mu_n' z_{ni} + \varepsilon_{ni})(\mu_n' z_{nj} + \varepsilon_{nj})] = z_{ni}' W z_{nj}$$

tal que W é a covariância de μ_n. A utilidade é correlacionada sobre as alternativas mesmo quando o componente de erro é independente, tal que W é diagonal.

Padrões de Substituição

No mixed logit não se tem IIA. A razão de duas probabilidades mixed logit depende de todos os dados (demais alternativas). Os denominadores da fórmula mixed logit estão dentro das integrais e portanto não cancelam na razão de probabilidades. A mudança percentual na probabilidade de uma alternativa dada a mudança percentual no atributo m de outra alternativa é:

$$E_{nix_{nj}^m} = -\frac{x_{nj}^m}{P_{ni}} \int \beta^m L_{ni}(\beta) L_{nj}(\beta) f(\beta) d\beta \tag{10}$$

$$= -x_{nj}^m \int \beta^m L_{nj}(\beta) \left[\frac{L_{ni}(\beta)}{P_{ni}} \right] f(\beta) d\beta$$

tal que β^m é o elemento m de β.

A elasticidade é diferente para cada alternativa i. Uma redução de 10% de uma lternativa necessariamente não implica em redução de 10% em cada outra alternativa. O padrão de substituição depende da especificação das variáveis e da distribuição de mistura. Observe que a mudança percentual na probabilidade depende da correlação entre $L_{ni}(\beta)$ e $L_{nj}(\beta)$ sobre valores diferentes de β.

RUM vs mixed logit

Resultado: qualquer modelo de utilidade aleatória (RUM) pode ser aproximado por um mixed logit com escolha apropriada de variáveis e distribuição de misturas.

Um modelo RUM pode ser expresso como:

$$U_{nj} = \alpha_n' z_{nj}$$

tal que z_{nj} são variáveis relacionados com j e α segue qualquer distribuição $f(\alpha)$. A probabilidade condicional é

$$q_{ni}(\alpha) = I(\alpha_n' z_{ni} > \alpha_n' z_{nj} \forall j \neq i), \tag{11}$$

aqui $I(\cdot)$ é a função indicadora (0 ou 1) se o evento (escolha) ocorre. Esta probabilidade condicional é deterministica no sentido de que a probabilidade é tanto zero ou um: condicional sobre todos os termos aleatórios, a escolha do indivíduo é completamente determinada. A probabilidade de escolha não condicional é a integral de $q_{ni}(\alpha)$ sobre α:

$$Q_{ni} = \int I(\alpha_n' z_{ni} > \alpha_n' z_{nj} \forall j \neq i) f(\alpha) d\alpha$$

Esta probabilidade pode ser aproximada por um modelo mixed logit.

Faça a utilidade ser ponderada por λ: $U_{nj}^* = (\alpha/\lambda) z_{nj}$. Esse termo de escala não muda o modelo dado que o comportamento (escolha) não é afetada pelo nível da utilidade.

Em seguida adicione um termo iid valor extremo ε_{nj}: assim se obtém o mixed logit. Este termo muda o modelo pois afeta individualmente as alternativas, mas o efeito deste termo é inócuo.

O mixed logit baseado nesta utilidade é

$$P_{ni} = \int \left(\frac{e^{(\alpha/\lambda)' z_{ni}}}{\sum_j e^{(\alpha/\lambda)' z_{nj}}} \right) f(\alpha) d\alpha$$

A medida que $\lambda \to 0$, os coeficientes α/λ na fórmula logit se tornam grande fazendo com que P_{ni} vá para 1 para a alternativa com maior utilidade. Ou seja, a probabilidade mixed logit P_{ni} vai para a probabilidade verdadeira Q_{ni} a medida que λ vai para 0. Usando o fator de escala para os coeficientes se pode aproximar o modelo mixed logit do verdadeiro.

Adicionando um termo de valor extremo na utilidade verdadeira transforma um modelo em mixed logit. Esta mudança muda o valor das alternativas. Entretanto, pelo aumento da escala da utilidade por λ é possível fazer com que a introdução dos termos de erro não tenha efeito. Esta mudança não muda a utilidade quando o termo de escala da utilidade é suficientemente grande. Portanto, um modelo mixed logit pode ser aproximado por qualquer modelo RUM simplesmente pela introdução do termo de escala na utilidade.

Simulação

O problema: $U_{nj} = \beta_n' x_{nj} + \varepsilon_{nj}$. Coeficientes β_n são distribuidos com densidade $f(\beta \mid \theta)$, tal que θ é o conjunto de parâmetros da distribuição. O economista especifica a forma funcional $f(\cdot)$ e deseja estimar os parâmetros θ.

As probabilidades de escolha são:

$$P_{ni} = \int \left[\frac{e^{\beta' x_{ni}}}{\sum_{j=1}^{J} e^{\beta' x_{nj}}} \right] f(\beta \mid \theta) d\beta \tag{12}$$

Estas probabilidades são aproximadas por simulação para um dado valor de θ:

1. Sorteie um valor de β de $f(\beta \mid \theta)$ e denomine ele de β^r. Neste caso $r = 1$ pois é o primeiro número selecionado.

2. Calcule a fórmula logit, $\left[\frac{e^{\beta' x_{ni}}}{\sum_{j=1}^{J} e^{\beta' x_{nj}}}\right]$, com este número selecionado.

3. Repita os passos 1 e 2 várias vezes e calcule a média dos resultados. Esta média é a probabilidade simulada:

$$\bar{P}_{ni} = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} \left[\frac{e^{\beta^r{}' x_{ni}}}{\sum_{j=1}^{J} e^{\beta^r{}' x_{nj}}}\right] \tag{13}$$

aqui R é o número total de sorteios.

$\bar{P}_{ni}$ é um estimador de P_{ni} não-viesado por construção. A variância diminui a medida que R aumenta. $\bar{P}_{ni}$ é diferenciável duas vezes nos parâmetros θ e nas variáveis x – isto facilita a estimação ML e o cálculo das elaticidades.

As probabilidades simuladas são inseridas na função log-verossimilhança para gerar a log-verossimilhança simulada:

$$SLL = \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{J} d_{nj} \ln \bar{P}_{ni} \tag{14}$$

aqui $d_{nj} = 1$ se n escolhe j e 0 caso contrário. O estimador MSLE (maximum simulated likelihood estimator) é o valor de θ que maximiza SLL. Usualmente diferente números sorteados são usadas para cada observação.

O MSLE pode ser relacionado com o método de simulação AR (accept-reject). O simulador AR possui os seguintes passos:

1. Sorteie um conjunto de números aleatórios;
2. A utilidade de cada alternativa é calculada a partir deste sorteio e a alternativa com maior utilidade é identificada;
3. Repita os passos 1 e 2 muitas vezes;
4. A probabilidade simulada para uma alternativa é calculada como proporção de sorteios para cada alternativa com maior utilidade.

O simulador AR não é viesado por construção. Todavia, não é estritamente positivo para qualquer número de sorteios. Também não é uma função suave. Ele é uma função ‘degrau’ (step function).

Dados em painel

A especificação mais simples trata o coeficiente que entra na utilidade como variando sobre as pessoas, mas sendo constante nas situações de escolha para cada pessoa. A utilidade de cada alternativa j na situação de escolha t pela pessoa n é:

$$U_{njt} = \beta_n x_{njt} + \varepsilon_{njt}$$

ε_{njt} é iid valor extremo sobre njt. Considere a sequência de alternativas, uma para cada período do tempo, $\boldsymbol{i} = \{i_1, ..., i_T\}$. Condicional sobre β, a probabilidade com que um indivíduo faz a sua sequência de escolhas é o produto das fórmulas logit:

$$\boldsymbol{L}_{ni}(\beta) = \prod_{t=1}^{T} \left[\frac{e^{\beta_n' x_{ni_t t}}}{\sum_j e^{\beta_n' x_{njt}}} \right] \tag{15}$$

dado que ε_{njt} é independente ao longo do tempo. A probabilidade não condicional é a integral do produto sobre todos os valores de β:

$$P_{ni} = \int \boldsymbol{L}_{ni}(\beta) f(\beta) d\beta \tag{16}$$

A única diferença entre o mixed logit com escolhas repetidas e um com uma escolha por indivíduo n é que o integrado contém o produto de fórmulas logit, um para cada período de tempo. O processo de simulação aqui é o mesmo.

Single Agent Dynamics

Problema Dinâmico

Modelo básico de programação dinâmica: tempo discreto t, agente i. Tempo pode ser horizonte finito ou infinito para escrever o modelo.

Defina s_{it} como o vetor de várias de estado e $a_{it} \in \{0, 1, ..., J\}$ como as escolhas discretas. Os agentes formam expectivas sobre variáveis de estado $F(s_{it+1} \mid s_{it}, a_{it})$. Usualmente se assume processo de Markov e expectativas racionais, que são hipóteses importantes de identificação).

O problema de otimização do agente pode ser escrito como:

$$V(s_{it}) = \max_{a \in A} \left\{ u(a, s_{it}) + \beta \int V(s_{it+1}) dF(s_{it+1} \mid s_{it}, a) \right\} \quad (17)$$

A função valor especifica da escolha é definida como

$$v(a, s_{it}) = u(a, s_{it}) + \beta \int V(s_{it+1}) dF(s_{it+1} \mid s_{it}, a) \tag{18}$$

Então defina a escolha ótima como:

$$\alpha(s_{it}) = \underset{a \in A}{\text{argmax}} \{v(a, s_{it})\} \tag{19}$$

Os dados empregados em geral são de longitudinais (dados em painel). N indivíduos formando um painel (i, t). Se observa ações a_{it} e variáveis de estado x_{it}.

O econometrista define um termo de erro: ε_{it}. Este termo de erro é *estrutural* no sentido de que a variáveis de estado é parte observável e parte não observável, $s_{it} = x_{it}, \varepsilon_{it}$.

O objetivo é estimar parâmetros estruturais que governam as preferências em $u(a, s_{it})$. Probabilidades de transição também são estimadas. É possível estimar o fator de desconto β mas é complicada a estimativa deste parâmetro.

O problema de programação dinâmica da origem ao logit condicional – Clogit. As hipóteses são:

- Separabilidade aditiva: $u(a, x_{it}, \varepsilon_{it}) = u(a, x_{it}) + \varepsilon_{it}(a)$. O termo $\varepsilon_{it}(a)$ é média zero. Se faz um não-observável para cada ação, então a dimensão de ε_{it} é $J \times 1$.

- Defina θ_U como os parâmetros que governam u e G_ε.

- IID: ε é i.i.d. distribuido sobre agentes e tempo de acordo com G_ε.

- Independência condicional de x_{it}:

$$F(s_{it+1} \mid s_{it}, a_{it}) = F(x_{it+1} \mid x_{it}, a_{it}) G_\varepsilon$$

  Governado por θ_f

- Clogit: $\{\varepsilon_{it}(a) : a = 1, 2, ..., J\}$ são independentemente distribuido como valor extremo tipo I.

Clogit: John Rust (1987)*

Modelo empírico de Harold Zurcker, que gerenciava frota de ônibus em Madison (WI). Toda semana ele decide trocar ou não o motor de cada ônibus da frota.†

Este é o problema de parada ótima:

- Custo fixo do motor, no caso o motor retificado tem custo de manutenção mais baixo;

- O custo de manutenção do motor aumenta com a idade.

*Seguindo notas de aula de Robin Lee (2019).

†John Rust, "Optimal Replacement of GMC Bus Engines: An Empirical Model of Harold Zurcher," Econometrica, 55 (5) 1987.

Se pode mostrar que existe um ponto em milhas x^* a partir do qual o ônibus terá seu motor trocado.

Este é um desenho de problema comum para várias aplicações: parada ótima, demanda dinâmica, job search, etc.

Modelo

Problema de parada ótima para um único ônibus.

Faça $a_t = 1$ se o motor é substituído no tempo t, 0 caso contrário.

H. Zurcher escolhe uma sequência de ações $a \equiv \{a_1, a_2, ..., a_t, ...\}$:

$$\max_a \left\{ \mathsf{E} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(x_t, \varepsilon_t, a_t; \theta) \right\} \tag{20}$$

A milhagem (quilometragem) x_{t+1} evolui de acordo com $F(x_{it+1} \mid x_{it}; \theta_F)$ se $a_t = 0$, caso contrário $x_{t+1} = 0$ (motor é novo se ele foi substituído).

A utilidade é parametrizada como:

$$u(a_t, x_t, \varepsilon_t; \theta) = -c(x_t(1 - a_t); \theta) - a_t \times RC + \varepsilon_{a_t t} \tag{21}$$

tal que c é a função custo de manutenção que é crescente em x_t, e RC é o custo de substituição do motor.

Objetivo da estimação: parâmetros da função custo c, custo de reposição RC, e parâmetros governando $F(x_{it+1} \mid x_{it}; \theta_F)$.

Dificuldade: difícil de identificar separadamente β e RC – dois extremos: paciente e alto RC ou miope e baixo RC.

Dados e estimação

162 ônibus: dados de milhas x_{it} e decisões de manutenção a_{it}.

Das hipóteses de independência condicional de x_t e ε iid, $p(x_{t+1}, \varepsilon_{t+1} \mid a_t, x_t, \varepsilon_t) = p(x_{t+1} \mid a_t, x_t) G_{\varepsilon_{t+1}}$, tal que a função de verossimilhança para os dados de um único ônibus pode ser simplificado para:

$$\log I(x_1, ..., x_T, a_1, ..., a_T \mid x_0, a_0; \theta) =$$

$$\sum_{t=1}^{T} \log F(x_t \mid x_{t-1}, a_{t-1}; \theta_F) + \sum_{t=1}^{T} \log \text{Prob}(a_t \mid x_t; \theta) \qquad (22)$$

Dois componentes da verossimilhança: transições de 'quilometragem' e a probabilidade de substituição do motor.

Estimação

Primeiro estágio. Estimando $F(x_{t+1} \mid x_t; \theta_F)$.

Rust assume que $\Delta x_{t+1} \equiv x_{t+1} - x_t$ segue uma distribuição multinomial discreta:

$$\Delta x_{t+1} = \begin{cases} [0, 5000) & \text{com prob. } \theta_{F0} \\ [5000, 10000) & \text{com prob. } \theta_{F1} \\ [10000, \infty) & \text{com prob. } 1 - \theta_{F0} - \theta_{F1} \end{cases}$$

Esta análise (manipulação) pode ser feita primeiro (usando a frequência empírica dos dados). O espaço é discretizado em 90 intervalos com tamanho de 5000 milhas.

Segundo estágio.

Especificação do problema de decisão dinâmica de cada agente:

$$a_t = \alpha(x_t, \varepsilon_t; \theta) =$$

$$= \underset{a}{\text{argmax}} \left\{ u(x_t, \varepsilon_t, a; \theta) + \beta \mathsf{E}[V_\theta(x_{t+1}, \varepsilon_{t+1}) \mid x_t, \varepsilon_t, a] \right\} \tag{23}$$

onde a função valor V é dada por:

$$V_\theta(x, \varepsilon) = \max_a \{ v_\theta(a = 1, x, \varepsilon), v_\theta(a = 0, x, \varepsilon) \} \tag{24}$$

e a função-valor especifica de cada escolha é:

$$v_\theta(a, x, \varepsilon) = \begin{cases} u(x, \varepsilon, 1; \theta) + \beta \mathsf{E}[V_\theta(x', \varepsilon') \mid x = 0] & \text{se } a_t = 1 \\ u(x, \varepsilon, 0; \theta) + \beta \mathsf{E}[V_\theta(x', \varepsilon') \mid x = x] & \text{se } a_t = 0 \end{cases} \tag{25}$$

Relembre que a utilidade é parametrizada como

$$u(x_t, \varepsilon_t, a_t; \theta) = -c(x_t(1 - a_t); \theta) - a_t \times RC + \varepsilon_{a_t t}$$

Faça $u(x, a; \theta) \equiv u(x, \varepsilon, a; \theta) - \varepsilon_a$ ser a parte da utilidade menos o termo de erro.

Uma vez que se assume que ε é termo de erro logit iid se tem:

$$\text{Prob}(a_t = 1 \mid x_t; \theta) =$$

$$= \frac{\exp\left(u(x_t, a_t; \theta) + \beta \mathsf{E}[V_\theta(x_{t+1}, \varepsilon_{t+1}) \mid x_t, a_t]\right)}{\sum_{j=0,1} \exp\left(u(x_t, a_j; \theta) + \beta \mathsf{E}[V_\theta(x_{t+1}, \varepsilon_{t+1}) \mid x_t, a_j]\right)} \tag{26}$$

Isto significa que se for solucionado o problema para a função-valor $V_\theta(\cdot)$ de cada agente, se pode calcular a Prob$(a_t \mid x_t; \theta)$ e formar a verossimilhança.

Nested Fixed Point Algorithm

Para um dado parâmetro de valor θ:

Passo 1: Faça x representar a milhagem ao final do último período, e y, j representam a milhagem no próximo período e a escolha, respectivamente. Rust itera a função valor esperado:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}V(x;\theta) &\equiv \mathsf{E}_{y,\varepsilon}[V_\theta(y,\varepsilon) \mid x] \\
&= \mathsf{E}_{y,\varepsilon}\left[\max_{j=0,1}[u(y,j;\theta) + \varepsilon + \beta \mathsf{E}V(y(1-j);\theta)] \mid x\right] \\
&= \mathsf{E}_y\left[\log \sum_{j=0,1} \exp[u(y,j;\theta) + \beta \mathsf{E}V(y(1-j);\theta)] \mid x\right]
\end{aligned}$$

tal que $\mathsf{E}V(\cdot)$ é solucionado para um *grid* discretizado de pontos (e relembre que a milhagem é assumida para avançar com probabilidade multinomial sobre $\{0, 1, 2\}$).

Passo 2: Uma vez que a convergência sobre $\mathrm{E}V(\cdot;\theta)$ é obtida, as probabilidades de escolha são obtidas:

$$\mathrm{Prob}(a_t = 1 \mid x_t;\theta) =$$

$$\frac{\exp(-c(0;\theta) - RC + \beta \mathrm{E}V(0;\theta))}{\exp(-c(0;\theta) - RC + \beta \mathrm{E}V(0;\theta)) + \exp(-c(x_t;\theta) + \beta \mathrm{E}V(x_t;\theta))}$$

$$\mathrm{Prob}(a_t = 0 \mid x_t;\theta) =$$

$$\frac{\exp(-c(x_t;\theta) + \beta \mathrm{E}V(x_t;\theta))}{\exp(-c(0;\theta) - RC + \beta \mathrm{E}V(0;\theta)) + \exp(-c(x_t;\theta) + \beta \mathrm{E}V(x_t;\theta))}$$

Observe a grande dependência das hipóteses, particularmente os erros iid e independência condicional das variáveis de estado. Irá limitar certas aplicações.

Existe um método de solução completa: para cada solução do vetor de parâmetros θ, o problema de programação dinâmica do agente é explicitamente solucionado (iteração na função valor). Computacionalmente complexo.[‡]

[‡]Métodos alternativos: procedimentos de estimação CCP (Hotz e Miller, 1993) e NPL (Aguirregabiria e Mira, 2002).

CCP

Abodagem alternativa ao CLogit, evita problema de programação dinâmica. Ao invés de solucionar o problema de programação dinâmica para cada valor de θ se pode usar a idéia de Hotz e Miller (1993) e Hotz, Miller, Sanders e Smith (1994).*

Resumo: (i) estimar o processo governando a evolução de x;

(ii) estimar as probabilidades condicional de escolha: a princípio para espaço de estado discreto se pode apenas obter a estimativa

*Hotz, J., and R. Miller (1993) "Conditional Choice Probabilties and the Estimation of Dynamic Models," Review of Economic Studies, 60. & Hotz, J., R. Miller, S. Sanders, and J. Smith (1994) "A Simulation Estimator for Dynamic Models of Discrete Choice," Review of Economic Studies, 61.

de frequência para cada CCP; para espaço de estado contínuo usar estimador não-paramétrico (e.g. kernel ou sieves);

(iii) recuperar as funções valor do CCP estimado usando a inversão de HM'93;

(iv) estimar θ baseado na estimativa das funções valor.

Estimação

Primeiro podemos estimar o seguinte diretamente a partir dos dados: Probabilidades de transição de estados observados e variáveis de controle (estimado pela distribuição condicional empírica):

$$\widehat{F}(x' \mid x, a) \equiv \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T-1} \frac{\mathbf{1}(x_{i,t+1} < x', x_{it} = x, a_{it} = 0)}{\mathbf{1}(x_{it} = x, a_{it} = 0)} & \text{se } a = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T-1} \frac{\mathbf{1}(x_{i,t+1} < x', a_{it} = 1)}{\mathbf{1}(a_{it} = 1)} & \text{se } a = 1 \end{cases} \qquad (27)$$

Probabilidades de escolha, condicional à variáveis de estado:

$$\widehat{P}(a = 1 \mid x) \equiv \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T-1} \frac{\mathbf{1}(x_{i,t+1} < x', x_{it} = x)}{\mathbf{1}(x_{it} = x)} \tag{28}$$

$$\widehat{P}(a = 0 \mid x) \equiv 1 - \widehat{P}(a = 1 \mid x) \tag{29}$$

Faça $\tilde{v}(a, x; \theta) \equiv v_{\theta}(a, x, \varepsilon) - \varepsilon$.

Com as estimativas de $\widehat{F}(x' \mid x, a)$, $\widehat{P}(a = 1 \mid x)$ e $\widehat{P}(a = 0 \mid x)$ calculadas, se pode expressar a função-valor específica da escolha (sem o termo de erro logit ε) para qualquer a no período corrente como:[†]

$$\tilde{v}(a,x;\theta) = u(x,a;\theta) + \beta \mathsf{E}\Big[u(x',a;\theta) + \varepsilon' + \beta \mathsf{E}[u(x\prime\prime,a\prime\prime;\theta) + \varepsilon\prime\prime] + \beta^2 \mathsf{E}[...]\Big]$$

tal que expectativas são condicionais: i.e., a primeira expectativa é $\mathsf{E}_{(x\prime|x,a)}$ $\mathsf{E}_{(a\prime|x\prime)}$ $\mathsf{E}_{(\varepsilon\prime|x\prime,a\prime)}$.

Se ε é logit i.i.d., $\mathsf{E}[\varepsilon \mid a,x] = \gamma - \log(P(a \mid x))$, tal que γ é a constante de Euler (0.577...).

Então para um dado θ:

[†]Observe que a observação de $a\prime \mid x\prime$ é fundamental para fazer a simulação para à frente das funções-valor de escolha.

- Simule para a frente (para $a = 0, 1$):

$$\tilde{v}(a, x; \theta) \equiv \frac{1}{S} \sum_s [u(x, a; \theta) + \beta[u(a'^s, x'^s) +$$

$$+\gamma - \log(\widehat{P}(a'^s \mid x'^s)) +$$

$$+\beta[u(a''^s, x''^s) + \gamma - \log(\widehat{P}(a''^s \mid x''^s)) + \beta ...]]]$$

  tal que $x'^s \sim \widehat{F}(\cdot \mid x, a)$, $a'^s \sim \widehat{P}(\cdot \mid x'^s)$, $x''^s \sim \widehat{F}(\cdot \mid x'^s, a'^s)$, ...

- Dadas as função-valor simulada especifica a cada escolha, a CCP prevista é:

$$\tilde{P}(a = 1 \mid x; \theta) \equiv$$

$$\equiv \frac{\exp(\tilde{v}(a = 1, x; \theta))}{\exp(\tilde{v}(a = 0, x; \theta)) + \exp(\tilde{v}(a = 1, x; \theta))} \tag{30}$$

(observe a diferença entre as ações)

$$\widehat{\theta} = \underset{\theta}{\text{argmin}} \parallel \Big[\log(\widehat{P}(a = 1 \mid x)) - \log(\widehat{P}(a = 0 \mid x))\Big] -$$
$$- [\tilde{v}(a = 1, x; \theta) - \tilde{v}(a = 0, x; \theta)] \parallel \tag{31}$$

Em resumo, aqui é simulado $\tilde{v}(a, x; \theta)$ pelo sorteio de S sequências de (a_t, x_t) com um valor inicial (a, x), e pelo cálculo da utilidade valor-presente correspondente a cada sequência. Então a estimativa simulada de $\tilde{v}(a, x; \theta)$ é obtida pela média amostral.

Vantagem: estimar os parâmetros dinâmicos sem solucionar o problema de programação dinâmica para cada solução de θ. A chave aqui é ter uma estimativa consistente de $\widehat{P}(a \mid x)$.

Usar a seguinte ideia:

- Assuma que agentes escolhem a política ótima em cada estado;

- Se recupera aqui estimativas "forma reduzida" consistentes com estas políticas ótimas $\widehat{P}$ e transições sobre as variáveis de estado $\widehat{F}$;

- Em θ_0, estimativas simuladas das funções valor escolha específico resulta nas políticas ótimas previstas $\tilde{P}$ que coincidem com as políticas observadas $\widehat{P}$.

Quando S é discreto, solucionando para a função valor dadas as políticas estimadas é equivalente a resolver um sistema de equações lineares (inversão de matriz).